岡山大学 2025 年度入試 数学 解説

$\boxed{1}$ （整数問題）

(1) $3x+11y=1$ の整数解を1組求めたいので，$3<11$ より y に $\pm1, \pm2, \cdots$ を代入して，対応する整数 x が存在するかどうか調べます。

$$3\times4+11\times(-1)=1 \quad より \quad x=4, y=-1$$

(2) 単純に $3\times4+11\times(-1)=1$ を 1000 倍すると後が面倒です。

$3\times3+11\times90=999$ と $3\times4+11\times(-1)=1$ を辺々加えると

$$3\times7+11\times89=1000$$

$x=7, y=89$ は $3x+11y=1000$ の解です。

条件を直線の方程式と考えると

$$3x+11y=1000 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{11}x+\frac{1000}{11}$$

より，x が 11 増加すると y は 3 減少するので

$3x+11y=1000$ の整数解は $x=7+11k, y=89-3k$（k は整数）

(3) $x=7+11k>0$ かつ $y=89-3k>0$ とすると $k=0, 1, 2, \cdots, 29$

この中で $|x-y|=|7+11k-(89-3k)|=|14k-82|$

を最大にする k の値は $k=29$ （詳しく調べる必要はないでしょう）

このとき $x=326, y=2$

$\boxed{2}$ （数列）

(1)　A$(n,0,0)$, B$(0,n,0)$, C$(0,0,2n)$ より

直線ABの方程式は $x+y=n\ (z=0)$

直線ACの方程式は $2x+z=2n\ (y=0)$

平面 $x=k$ と直線ABの交点は $(k,n-k,0)$

平面 $x=k$ と直線ACの交点は $(k,0,2n-2k)$

三角形 T_k の頂点は $(k,0,0)$, $(k,n-k,0)$, $(k,0,2n-2k)$

(2)　三角形 T_k の内部に含まれる格子点の個数は，xy 平面上の

３点 O$(0,0)$, P$(n-k,0)$, Q$(0,2n-2k)$ を頂点とする三角形の

内部に含まれる格子点の個数に等しい。４点 O$(0,0)$, P$(n-k,0)$,

R$(n-k,2n-2k)$, Q$(0,2n-2k)$ を頂点とする長方形を考えると

長方形の内部に含まれる格子点の個数は $(n-k-1)(2n-2k-1)$ 個

長方形の内部で対角線PQ上の格子点の個数は $(n-k-1)$ 個

三角形OPQの内部に含まれる格子点の個数は

$$\frac{1}{2}\{(n-k-1)(2n-2k-1)-(n-k-1)\}=(n-k-1)^2 \text{ 個}$$

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k-1)^2=(n-2)^2+(n-3)^2+\cdots\cdots+2^2+1^2=\sum_{k=1}^{n-2}k^2$

$$\sum_{k=1}^{n-2}k^2=\frac{1}{6}(n-2)(n-1)\{2(n-2)+1\}=\frac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3)$$

$\boxed{3}$ （平面座標と双曲線）

(1) 線分APの垂直二等分線上の任意の点をR(x, y)とするとAR＝PRより

$$(x-4)^2+y^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

展開して整理すると

$$2(a-4)x+2by-a^2-b^2+16=0 \quad \cdots\cdots ①$$

点P(a, b)は，円 $x^2+y^2=4$ の上を動くので

$$a^2+b^2=4$$

これを①へ代入すると

$$2(a-4)x+2by-4+16=0$$

したがって

$$(a-4)x+by+6=0 \quad \cdots\cdots ②$$

(2) OP: $bx-ay=0$ と②が平行のとき

$-a(a-4)-b^2=0$　より　$4a=a^2+b^2=4$

したがって　$(a, b)=(1, \pm\sqrt{3})$

(3) ②より　$ax+by=4x-6$　これと　OP: $bx-ay=0$　より

$a^2+b^2=4$ を利用して x, y の関係式を導きます。

$$(ax+by)^2+(bx-ay)^2=(4x-6)^2+0$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2)x^2+(a^2+b^2)y^2=16x^2-48x+36$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2=16x^2-48x+36$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=4x^2-12x+9$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-12x+12-y^2=3 \quad \cdots\cdots ③$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2-\frac{y^2}{3}=1$$ （グラフは省略）

（注）交点の座標(x, y)をa, bで表し，その結果から③を導くには
かなりの計算が必要なので，実戦的な解法ではありません。

$\boxed{4}$ （三角関数）

(1) AB＝AC＝3, BC＝ $6\cos\theta$ より

$S_1=3\times1+3\times1+6\cos\theta\times1+\pi=6+6\cos\theta+\pi$

(2) AB＝AC＝3, $\angle\mathrm{BAC}=\pi-2\theta$ より△ABCの面積 T は

$T=\dfrac{1}{2}\times3\times3\times\sin(\pi-2\theta)=\dfrac{9}{2}\sin2\theta$

AB＝AC＝3, BC＝ $6\cos\theta$ より三角形の内接円の半径を求める公式を適用すると

$r(\theta)=\dfrac{2T}{3+3+6\cos\theta}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sin2\theta}{1+\cos\theta}$

(3) $0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において

$\sin2\theta$ は単調増加，$1+\cos\theta$ は単調減少

したがって $\dfrac{\sin2\theta}{1+\cos\theta}$ は単調増加である。

最大値は $r\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{3(2-\sqrt{2})}{2}$

(4) △ABCの面積を T とすると

AB＝AC＝3 より　$S_2<T\leqq\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$ なので

$S_1=6+6\cos\theta+\pi>6>T>S_2\ \left(0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ である。

（注）(4) は出題ミスと思われます。

明誠学院高等学校　特別講師　　北中 清史